جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر بنى جبرية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الفصل الأول للعام الدراسي 2013 / 2014

المدة : ساعتان
العلامة : 100
اسم الطالب :

السؤال الأول: (15 علامة) اثبت ان نصف الزمرة S ذات الصفر تكون زمرة ذات صفر إذا وفقط إذا تحقق الشرط : $\forall a \in S - \{0\} \ , \ aS = Sa = S$.

السؤال الثاني: (24 علامة) أ – اثبت أنه إذا كان φ هومومورفيزما من نصف الزمرة S إلى نصف الزمرة $\acute{S}$ فإن $\varphi(S)$ تكون نصف زمرة جزئية من $\acute{S}$.

ب – اثبت أن ممدد التمثيل النظامي لنصف زمرة S أي $\varphi: S^1 \to \mathcal{F}(S^1)$ حيث $a \to \lambda_a$ هو تمثيل امين .

ج – اثبت أن الإنسحابين الداخليين λ_a و ρ_a في نصف زمرة S مترابطان .

السؤال الثالث: (15 علامة) ليكن e عنصرا جامدا في نصف زمرة S ولتكن H_e مجموعة جزئية من eSe تحوي كل عنصر من eSe يملك نظيرا في eSe بالنسبة إلى e فاثبت أن :

أ - H_e زمرة جزئية من S تحوي e .

ب - H_e تحوي اي زمرة جزئية G من S تتقاطع مع H_e اي ان $G \cap H_e \neq \emptyset \Rightarrow G \subseteq H_e$.

السؤال الرابع: (10 علامات) اثبت أن نصف الزمرة الدوارة (a) ذات الدليل r والدور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كان $r = 1$.

السؤال الخامس: (10 علامات) إذا كان a عنصرا ثابتا في الزمرة النصف طبولوجية G فاثبت أن تطبيق الإنسحاب الداخلي اليساري $\lambda_a: G \to G$ حيث $\lambda_a(x) = ax$ يكون هوميومورفيزما .

السؤال السادس: (15 علامة) إذا كانت H زمرة جزئية مفتوحة من زمرة طبولوجية G فاثبت أن H تكون مغلقة أيضا .

السؤال السابع: (11 علامة) لتكن $G = \{1, -1, i, -i\}$ حيث i العدد التخيلي، ولنعرف على G الضرب العادي المألوف فتصبح G زمرة ولنزودها بالطبولوجيا τ المعرفة بالشكل التالي : $A \in \tau \Leftrightarrow 1 \in A$ (اي أن المجموعات المفتوحة في G هي المجموعات الحاوية على العنصر 1) فتصبح G زمرة طبولوجية

أ – هل التطبيق $g_1: G \times G \to G$ حيث $g_1(x, y) = xy$ مستمر في النقطة $(-1, i)$ ولماذا ؟

ب – هل التطبيق $g_2: G \to G$ حيث $g_2(x) = x^{-1}$ مستمر في النقطة i ولماذا ؟ علما أن $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$.

ج – هل G زمرة طبولوجية ولماذا ؟

حمص في 13 /2/ 2014

د . عصام نسيم

جامعة البعث | امتحان مقرر بنى جبرية (4)
كلية العلوم | لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
قسم الرياضيات | الفصل الثاني للعام الدراسي 2014/2013 | العلامة: 100

السؤال الأول: (15 علامة)

إذا كانت S نصف زمرة و B مجموعة القواسم اليمينية واليسارية لكل عنصر من S فاثبت أن B تكون غير خالية إذا وفقط إذا كانت S مونوئيد (نصف زمرة واحدية) .

السؤال الثاني: (15 علامة)

لتكن A مجموعة غير خالية و $\mathcal{F}(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة للمجموعة A فاثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون $\psi \in \mathcal{F}(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ هو أن يكون $\psi(A) \supseteq \varphi(A)$.

السؤال الثالث: (30 علامة)

أ – اثبت أن كل نصف زمرة منتهية تكون دورية ولكن العكس غير صحيح في الحالة العامة .

ب – اثبت أن نصف الزمرة S تكون نصف زمرة صفرية يمينية إذا كان كل تحويل ل S هو انسحاب يميني .

السؤال الرابع: (28 علامة)

ليكن a عنصراً ثابتاً من الزمرة النصف طبولوجية G والمطلوب :

أ – اثبت أن التحويل اليساري الداخلي $\lambda_a : G \to G$ حيث $\lambda_a(x) = ax$ هو هوميومورفيزم .

ب – إذا كانت F مجموعة مغلقة و P مجموعة مفتوحة فإن aF مغلقة و aP مفتوحة .

السؤال الخامس: (14 علامة)

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولنعرف عليها عملية الجمع العادية فتصبح $(\mathbb{R}, +)$ زمرة جمعية ، لنزودها بالطبولوجيا τ المعرفة بالشكل التالي :

$\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} ; 1 \in G\} \cup \{\emptyset\}$ أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الحاوية للعنصر 1 إضافة للمجموعة الخالية .

أ – هل التطبيق $g_1 : G \times G \to G$ مستمر في النقطة $(2, 3)$ ولماذا ؟

ب – هل التطبيق $g_2 : G \to G$ مستمر في النقطة 1 ولماذا ؟

ج – هل $\mathbb{R}$ في هذه الحالة زمرة طبولوجية ولماذا ؟

حمص في 19 / 6 /2014 | د . عصام نسيم

جامعة البعث	إمتحان مقرر بنى جبرية (4)	العلامة : 100
كلية العلوم	لطلاب السنة رابعة رياضيات - جبر	المدة : ساعة ونصف
قسم الرياضيات	الفصل الأول للعام الدراسي 2016/2015	اسم الطالب : [redacted]

السؤال الأول : (15 علامة)

اثبت أن نصف الزمرة S التي تحقق الشرط $\forall a \in S \,;\, aS = Sa = S$ تكون زمرة .

السؤال الثاني : (20 علامة)

أ) اثبت أنه إذا كان $\varphi: S \to S'$ هومومورفيزم من نصف الزمرة S في نصف الزمرة S' فإن $\varphi(S)$ تكون نصف زمرة جزئية من S' .

ب) اثبت أنه إذا كانت نصف الزمرة S تملك حيادياً يمينياً فإن كل إنسحاب يميني لنصف الزمرة S هو داخلي .



السؤال الثالث : (15 علامة)

إذا كان e عنصراً جامداً من نصف زمرة S فاثبت أن :

1) $eS = \{a \in S \,;\, ea = a\}$.

2) $Se = \{a \in S \,;\, ae = a\}$.

3) $eSe = \{a \in S \,;\, ae = ea = a\}$.

السؤال الرابع : (16 علامة)

اثبت أن نصف الزمرة الدوارة $\langle a \rangle$ ذات الدليل r والدور m تكون زمرة إذا وفقط إذا كانت $r = 1$.

السؤال الخامس : (24 علامة)

أ) ليكن a عنصراً ثابتاً من الزمرة النصف طبولوجية G ، فاثبت أن الإنسحاب اليميني $\rho_a: G \to G$ حيث $\rho_a(x) = xa$ (وذلك $\forall x \in G$) هو هوميومورفيزم .

ب) برهن أن كل زمرة طبولوجية تملك جملة أساسية تناظرية $\{u\}$ لمجاورات العنصر الحيادي e .

السؤال السادس : (10 علامات)

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، ولنعرف عليها عملية الجمع المألوفة فتصبح $(\mathbb{R},+)$ زمرة جمعية . لنعرف عليها طبولوجيا بالشكل التالي : $u \in \tau \Leftrightarrow 0 \in \tau$ (أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ الحاوية على العدد 0)

1) هل التطبيق $g_1: G \times G \to G$ حيث $g_1(x,y) = x + y$ مستمر في النقطة $(1,2)$ ولماذا ؟

2) هل التطبيق $g_2: G \to G$ حيث $g_2(x) = -x$ مستمر في النقطة 1 ولماذا ؟

حمص في 17 / 2 / 2016 د . عصام نسيم

جامعة البعث　　　　إمتحان مقرر بنى جبرية (4)　　　　اسم الطالب : رياض

كلية العلوم　　　　لطلاب السنة رابعة رياضيات (جبر)　　　　المدة : ساعة ونصف

قسم الرياضيات　　　　الفصل الثاني للعام الدراسي 2016/2015　　　　العلامة : 100

السؤال الأول : (15 علامة)

أثبت أنه إذا كانت S نصف زمرة ذات صفر فإن S تكون زمرة مع الصفر إذا وفقط إذا تحقق الشرط :

$(\forall a \in S - \{0\} ; aS = Sa = S)$.

السؤال الثاني : (15 علامة) سؤال هيم وحصم موشكير

لتكن G_1 و G_2 زمرتان ما بحيث أن $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ ولتكن $S = G_1 \cup G_2$ ولنعرّف قانون تشكيل داخلي على S كما يلي : لتكن $a, b \in S$ فإذا كانت a , b من زمرة واحدة (من G_1 أو من G_2) فإن ناتج ab هو نفسه في زمرتيهما ، أما إذا كانت $a \in G_1$ و $b \in G_2$ فإن $ab = ba = b$ ، فاثبت أن S نصف زمرة .

السؤال الثالث : (15 علامة)

ليكن λ و ρ إنسحابين يساري ويميني لنصف زمرة S ولتكن $a \in S$ فاثبت أن $\lambda . \lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$. وإذا كان λ و ρ مترابطين فاثبت أن $\lambda_a . \lambda = \lambda_{\rho(a)}$.

$\rho \rho_a = \rho_{\rho(a)}$

$\rho_a \rho = \rho_{\lambda(a)}$

السؤال الرابع : (15 علامة) 12-17

أثبت أن نصف الزمرة الدورية الإختزالية اليسارية S تكون زمرة إذا وفقط إذا ملكت عنصراً جامداً وحيداً .

السؤال الخامس : (15 علامة)

لتكن $\{U\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي e في الزمرة النصف طبولوجية G ، فاثبت أن $\{xU\}$ تشكل قاعدة للطبولوجيا على G .

السؤال السادس : (15 علامة)

إذا كانت H زمرة جزئية طبولوجية من الزمرة الطبولوجية G ، فاثبت أن $\overline{H}$ تكون أيضاً ، وأنه إذا كانت H ثابتة فإن $\overline{H}$ تكون أيضاً .

السؤال السابع : (10 علامات)

لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ، ولنعرّف عليها عملية الجمع العادية فتصبح $(\mathbb{R}, +)$ زمرة جمعية ، ولنزودها بالطبولوجيا τ المعرفة كما يلي : $\tau = \{G \subseteq \mathbb{R} ; 2 \in G\} \cup \{\emptyset\}$ (أي المجموعات المفتوحة هي المجموعات الجزئية من $\mathbb{R}$ الحاوية للعنصر 2 إضافة للمجموعة الخالية) .

1) هل التطبيق $g_1 : G \times G \to G$ حيث $g_1(x, y) = x + y$ مستمر في النقطة $(1 , 2)$ ولماذا ؟
2) هل التطبيق $g_2 : G \to G$ حيث $g_2(x) = -x$ مستمر في النقطة 2 ولماذا ؟

حمص في 30 / 6 / 2016　　　　د . عصام نسيم

ع ١ السلم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر بنى جبرية 4
لطلاب السنة الرابعة رياضيات (جبر)
الفصل الأول للعام الدراسي 2015/2014

العلامة: 100
المدة : ساعة ونصف
اسم الطالب :

السؤال الأول: (10 علامات)

اثبت أن نصف الزمرة S تكون زمرة إذا ملكت عنصراً مثل g يقسم كل من عناصرها يميناً ويساراً ويقبل بنفس الوقت القسمة يميناً ويساراً على كل عنصر من عناصرها .

السؤال الثاني: (20 علامة)

بفرض أن λ و ρ إنسحابين يساري ويميني لنصف زمرة S ، ولتكن $a \in S$ فأثبت أن

$\rho\rho_a = \rho_{\rho(a)}$ و $\lambda\lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$ ثم أثبت أنه إذا كان λ و ρ مترابطين فإن :

$\rho_a\rho = \rho_{\lambda(a)}$ و $\lambda_a\lambda = \lambda_{\rho(a)}$.

السؤال الثالث: (15 علامة)

لتكن S نصف زمرة و A مجموعة جزئية غير خالية من S ، اثبت أن $B = (A)$ إذا وفقط إذا كانت B هي تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A .

السؤال الرابع: (15 علامة)

اثبت أن كل نصف زمرة منتهية تكون دورية ولكن العكس غير صحيح .

السؤال الخامس: (10 علامات)

إذا كانت $\{u\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي e في الزمرة الطبولوجية G ، فأثبت أن $\{xu\}$ تشكل قاعدة للطبولوجيا على G .

السؤال السادس: (20 علامة)

بفرض أن (u) أسرة مجاورات للعنصر الحيادي e في الزمرة الطبولوجية G . فأثبت أنه من أجل أي مجموعة جزئية من G يكون $\bar{A} = \bigcap Au$.

السؤال السابع: (10 علامات)

لتكن $G = R$ مجموعة الأعداد الحقيقي وهي زمرة بالنسبة لعملية الجمع العادي ، ولنزود G بالطبولوجيا τ بالشكل التالي: $A \in \tau \Leftrightarrow 1 \in A$ (أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الجزئية من R الحاوية للعنصر 1) والمطلوب :

1) هل g_1 مستمر في النقطة $(1,2)$ ولماذا ؟
2) هل التطبيق g_2 مستمر في النقطة 1 ولماذا ؟ وهل G زمرة طبولوجية ولماذا ؟

حمص في 19/ 2015/2

د . عصام تميم

٢٤

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٤)

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر

الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥

السؤال الأول: [10]

مهما يكن a, b من S فإنه يوجد x_1 , x_2 , y_1 , y_2 في S بحيث أن

$a = x_1 g \qquad a = g y_1 \qquad g = x_2 b \qquad g = b y_2$

وبالتالي فإن: (5)

$a = x_1 g = x_1 x_2 g \qquad a = g y_1 = b y_2 y_1$

~~أي أن: $x = x_1 x_2$ حل للمعادلة $a = xb$ ، $y = y_2 y_1$ حل للمعادلة $a = by$~~

وبالتالي فإن S زمرة. (5)

السؤال الثاني: [20]

مهما يكن $x \in S$ فإن:

$\lambda \lambda_a(x) = \lambda(ax) = \lambda(a).x = \lambda_{\lambda(a)}(x) \Rightarrow \lambda \lambda_a = \lambda_{\lambda(a)}$ (5)

$\rho \rho_a(x) = \rho(xa) = x \rho(a) = \rho_{\rho(a)}(x) \Rightarrow \rho \rho_a = \rho_{\rho(a)}$ (5)

لنفرض الآن أن λ و ρ مترابطان ينتج أنه مهما يكن x من S فإن:

$\lambda_a \lambda(x) = \lambda_a(\lambda(x)) = a.\lambda(x) = \rho(a).x = \lambda_{\rho(a)}(x) \Rightarrow \lambda_a \lambda = \lambda_{\rho(a)}$ (5)

$\rho_a \rho(x) = \rho_a(\rho(x)) = \rho(x).a = x\lambda(a) = \rho_{\lambda(a)}(x) \Rightarrow \rho_a \rho = \rho_{\lambda(a)}$ (5)

السؤال الثالث: [15]

- لنفرض أن B هي تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A . إن $A \subseteq B$ و B هي نصف زمرة ⇐ B تحوي كل الجداءات الممكنة لعناصر A أي أن $\langle A \rangle \subseteq B$
- من ناحية أخرى $A \subseteq \langle A \rangle$ وبالتالي حسب تعريف B فإن $B \subseteq \langle A \rangle$ ، ومنه نستنتج أن $B = \langle A \rangle$ (8)
- لنفرض أن $B = \langle A \rangle$ ، أن كل [illegible] الجزئية من S تحوي A تكون حاوية $\langle A \rangle$ وبالتالي فهي تحوي B . ومنه [illegible] أصغر نصف زمرة جزئية من S تحوي A أي أن B هي تقاطع كل أنصاف [illegible] الزمر الجزئية من S الحاوية لـ A (7)

22

السؤال الرابع: [15]

لتكن S نصف زمرة منتهية عندها تكن a من S فإن $<a>$ منتهية لأنها محتواة في نصف زمرة منتهية وبالتالي فإن S دورية. (7)

من أجل اثبات ان العكس غير صحيح يكفي ان نعطي مثالاً على ذلك.

لتكن $S=P(N)$ مع عملية التقاطع، ان S هي نصف زمرة دورية لأنه $\forall A\in P(N)$ فإن A هو عنصر جامد وبالتالي $<A>=\{A\}$ وذلك $\forall A\in P(N)$

وبالتالي فإن $P(N)$ دورية مع ان $P(N)$ غير منتهية (8)

السؤال الخامس [10]

لتكن $a\in G$ ولتكن W مجاورة مفتوحة للعنصر a، بما ان $\lambda_a^{-1}: x\to a^{-1}x$ هوميومورفيزم (حسب مبرهنة) فإن $\lambda_a^{-1}(W)=a^{-1}W$ تكون مجموعة مفتوحة مجاورة للعنصر e أي أنها (5) مجاورة لـ e) ومنه يوجد عنصر $U\in\{U\}$ بحيث يكون $U\subseteq a^{-1}W \Leftarrow aU\subseteq W$

$\Leftarrow$ $\{xU\}$ وذلك $\forall x\in G$) هي قاعدة للطبولوجيا على G. (5)

السؤال السادس: [20]

- لتكن $x\in\bar{A}$، من اجل أي $U\in\{U\}$ فإن xU^{-1} تكون مجاورة للعنصر x ومنه (5)

$xU^{-1}\cap A\neq\phi \Leftarrow$ نوجد $a\in xU^{-1}\cap A \Leftarrow$ نوجد $a\in A$ و $a\in xU^{-1} \Leftarrow$ نوجد $a\in A$ و $x^{-1}a\in U$

$\Leftarrow a^{-1}x\in U \Leftarrow aa^{-1}x\in AU \Leftarrow x\in AU \Leftarrow x\in\cap AU$، ومنه نستنتج (5) ان $\bar{A}\subseteq\cap AU$

- إذا كانت $x\in\cap AU \Leftarrow x\in AU$ وذلك من اجل أي $U\in\{U\}$، عندئذ من اجل أي مجاورة مفتوحة P للعنصر x فإن $P^{-1}x$ تكون مجاورة مفتوحة للعنصر e (5) ومنه $x\in AP^{-1}x$ لأن $P^{-1}x\in\{U\}$ وهذا يعني انه يوجد $a\in A$ و $p\in P$ بحيث يكون $x=ap^{-1}x \Leftarrow ap^{-1}=e \Leftarrow a=p$ أي ان $P\cap A\neq\phi \Leftarrow$ (5) $x\in\bar{A} \Leftarrow \cap AU\subseteq\bar{A}$

السؤال السابع: [15]

١ - ان $g_1(1,2)=3$ [illegible] $\{3\}$ مجاورة للعنصر 3 وإن أصغر مجاورة للعنصر 1 هي $\{1\}$ وأصغر مجاورة للعنصر 2 هي $\{1,2\}$ وإن

$\{1\}+\{1,2\}=\{2,3\}\not\subseteq\{1,3\}$ أي ان g_1 غير مستمر في النقطة $(1,2)$ (5)

ج - ان $g_2(1)=-1$ وإن أصغر مجاورة للعنصر -1 هي $\{-1,1\}$ توجد مجاورة $\{1\}$ للعنصر 1 بحيث ان $-\{1\}=\{-1\}\subseteq\{-1,1\}$ أي ان g_2 مستمر في النقطة 1 (5)

نستنتج ان G ليست زمرة طبولوجية لأن g_1 غير مستمر

د. عصام شيخ

مع السلم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر بنى جبرية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر
الدورة الثالثة للعام الدراسي 2012 /2013

اسم الطالب:
العلامة: 100
المدة: ساعتان

السؤال الأول: (10 علامات) : لتكن S نصف زمرة تملك عنصرا g يقسم كل من عناصرها يمينا ويسارا ويقبل القسمة يمينا ويسارا على كل عنصر من عناصرها ، فأثبت ان S زمرة.

السؤال الثاني (15 علامة) : لتكن A مجموعة غير خالية و $\mathcal{F}(A)$ نصف زمرة التحويلات التامة للمجموعة A ، فأثبت أن الشرط اللازم والكافي ليكون $\psi \in \mathcal{F}(A)$ قاسم يساري للعنصر $\varphi \in \mathcal{F}(A)$ هو أن يكون $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$.

السؤال الثالث (15 علامة) : لتكن S نصف زمرة ولتكن $< a >$ نصف زمرة جزئية دوارة منتهية منها دليلها r ودورها m ، فأثبت أن المجموعة $K_a = \{a^r, a^{r+1}, \dots, a^{r+m-1}\}$ زمرة جزئية من $< a >$ مرتبتها m .

السؤال الرابع (15 علامة) : لتكن S نصف زمرة دورية إختزالية يسارية ، فأثبت أن S تكون زمرة إذا وفقط إذا ملكت عنصرا جامدا وحيدا .

السؤال الخامس (15 علامة) : ليكن a عنصرا ثابتا من الزمرة النصف طبولوجية G ، فأثبت أن التطبيق $\rho_a : G \to G$ حيث $\rho_a(x) = xa$ هوميومورفيزما ، ثمّ بيّن أنه إذا كانت P مجموعة مفتوحة في G فإن كل من Pa و PA مفتوحة في G حيث ($A \subseteq G$) .

السؤال السادس (15 علامة) : لتكن G زمرة ما و τ على G ، فأثبت أن G تكون زمرة طبولوجية إذا وفقط إذا كان التطبيق $g_3 : G \to G$ حيث $g_3(x, y) = xy^{-1}$ مستمرا وذلك $\forall x, y \in G$ طبولوجيا .

السؤال السابع (15 علامة) : لتكن $R^{\cdot}$ مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر ولنزودها بعملية الضرب العادية فتصبح $(R^{\cdot}, .)$ زمرة ولنعرف على $R^{\cdot}$ طبولوجيا τ بالشكل التالي: بفرض أن $A = \{1, 2\}$ فإن $U \in \tau \Leftrightarrow A \subseteq U$ (أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الحاوية على 1 و 2)

1) هل g_1 مستمر ؟ ولماذا ؟

2) هل g_2 مستمر ؟ ولماذا ؟

3) استنتج فيما إذا كانت $R^{\cdot}$ زمرة طبولوجية أم لا ؟

حمص في 19 /8 /2013

د . عصام نسيم

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٤)

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر

الدورة الثالثة للعام الدراسي ٢٠٢١/٢٠٢٢م

٢٥

السؤال الأول: [10]

بما يكن a و b من S فإنه يوجد x_1 و x_2 و y_1 و y_2 من S بحيث يكون:

$a = x_1 g \ , \ a = g y_1 \ , \quad g = x_2 b \ , \ g = b y_2$ (5)

بالتالي فإن:

$a = x_1 g = x_1 x_2 b \ , \quad a = g y_1 = b y_2 y_1$

أي أن $x = x_1 x_2$ حل للمعادلة $a = xb$ و $y = y_2 y_1$ حل للمعادلة $a = by$.

وبالتالي فإن S زمرة (5)

السؤال الثاني: [15]

لنفرض أن ψ قاسم يساري للتحويل φ $\Leftarrow$ يوجد تحويل $g \in \mathcal{T}(A)$

بحيث أن: $\varphi = \psi g$ وبالتالي فإن: $\varphi(A) = \psi g(A) \subseteq \psi(A)$ (5)

لنفرض الآن $\varphi(A) \subseteq \psi(A)$ $\Leftarrow$ $\forall x \in A$ فإن: $\varphi(x) \in \psi(A)$ $\Leftarrow$ $\forall x \in A$ يوجد $u \in A$

بحيث يكون $\varphi(x) = \psi(u)$، لنعرف التحويل $h : A \to A$ حيث $h(x) = u$ (5)

و $\psi(u) = \varphi(x)$ ومنه

$\psi h(x) = \psi(u) = \varphi(x) \quad \forall x \in A$

أي أن $\psi h = \varphi$ وبالتالي فإن ψ قاسم يساري لـ φ. (5)

السؤال الثالث: [15]

بما يكن العددان الطبيعيان u و v بحيث $u > r$ و $v > r$ فإنه يوجد العددان طبيعيان μ و λ بحيث يكون: $0 \leq \mu < m$ ، $\lambda \geq 0$; $u + v - r = \lambda m + \mu$

بالتالي

$a^u . a^v = a^{u+v} = a^{r+\lambda m+\mu} = a^{\lambda m + r} . a^{\mu} = a^{r+\mu} \in K_a$

أي أن K_a نصف زمرة، كما أن a^{km} هو عنصر حيادي في K_a لأنه:

$\forall a^u \in K$ فإن: (8)

تابع

$$a^{u} \cdot a^{km} = a^{u+km} = a^{u}$$
$$a^{km} \cdot a^{u} = a^{km+u} = a^{u} \Big\} \Rightarrow a^{km} \text{ حيادي في } K_a$$

معاكس العنصر a^{u} من K_a، لنفتش عن $a^{v} \in K_a$ بحيث يكون $a^{u} \cdot a^{v} = a^{km}$

$$a^{u+v} = a^{km} \Rightarrow u+v = km \Rightarrow v = km-u$$

$$a^{u} \cdot a^{km-u} = a^{km}$$
$$a^{km-u} \cdot a^{u} = a^{km}$$

(7)

وبالتالي فإن K_a زمرة جزئية دوارة من $\langle a \rangle$ مرتبتها m.

السؤال الرابع: [15]

- ليكن e العنصر الجامد الوحيد في نصف الزمرة الدورية الافتراضية اليسارية S و هو معاكس $a \in S$ فإن $\langle a \rangle$ منتهية وبالتالي لها الدور m والأساس r لنفرض جدلاً أن $r > 1$ فإن: $a^{r+m} = a^{r} \Leftarrow a\,a^{r+m-1} = a\,a^{r-1}$ لكن S افتراضية يسارية $\Leftarrow a^{r+m-1} = a^{r-1}$ ولكن هذا يناقض تعريف r و m فالفرض الجدلي خاطئ أي أن $r=1$ ومنه $\langle a \rangle = K_a$ زمرة جزئية من S حياديها e (لأن e الجامد الوحيد في S) وبالتالي: (8)

$$ea = ae = a, \quad \forall a \in S$$

فالجامد e هو حيادي S و $a \in \langle a \rangle$ فله نظير في $\langle a \rangle$ وله نظير في S وبالتالي فإن S زمرة.

- إذا كانت S زمرة فإن حياديها هو العنصر الجامد الوحيد فيها لأنه لو كان يوجد آخر مثل a فإن $a = a^2 \Leftarrow ae = aa \Leftarrow a = e$ (7)

السؤال الخامس: [15]

واضح أن التطبيق ρ_a هو تطبيق متباين وغامر، لتكن W مجاورة ما للنقطة xa وبما أن G زمرة نصف طبولوجية فإن ρ_a يكون مستمراً وبالتالي توجد مجاورة U للنقطة x بحيث يكون $\rho_a(U) = Ua \subseteq W$ وهذا يبرهن أن ρ_a مستمر. وبنفس الطريقة نبرهن أن التطبيق العكسي $\rho_a^{-1} = \rho_{a^{-1}} : x \to xa^{-1}$ مستمر وبالتالي فإن ρ_a يكون هوميومورفيزماً. (8)

(٢٠١٠ - ٢٠١٢) الدورة الثالثة

الصفحة (٣)

تابع

بما أن P_a هوميومورفيزماً فإنه صورة المجموعة المفتوحة وضمه تكون مفتوحة أي أن $P_a(P) = Pa$ مفتوحة في G كما أن $PA = \bigcup_{a \in A} Pa$

وبما أن اجتماع مجموعات مفتوحة هو مجموعة مفتوحة ومنه PA مفتوحة. (7)

السؤال السادس: [15]

- إذا كانت G زمرة طبولوجية فإن كلاً من التطبيقين g_1 و g_2 مستمر، ولتكن W مجاورة للعنصر xy^{-1} وبما أن g_1 مستمر ⟸ فإنه توجد مجاورة U للعنصر x ومجاورة V للعنصر y^{-1} بحيث يكون $UV \subseteq W$

V مجاورة للعنصر y^{-1} و $g_2 : y \to y^{-1}$ مستمر ⟸ توجد مجاورة V_1 للعنصر y بحيث يكون $V_1^{-1} \subseteq V$ ⟸ $UV_1^{-1} \subseteq UV \subseteq W$ ⟸ g_3 مستمر. (5)

- إذا كان التطبيق: $g_3 : G \times G \to G$ حيث $g_3(x, y^{-1}) \to xy$ مستمراً فإن $g_3(e, y) \to e y^{-1} = y^{-1}$ يكون مستمراً أي أنه من أجل أي مجاورة W للعنصر y^{-1} توجد مجاورة U للعنصر y بحيث يكون $eU^{-1} \subseteq W$ أو $U^{-1} \subseteq W$

وبالتالي فإن التطبيق $g_2 : G \to G$ حيث $g_2(x) = x^{-1}$ يكون مستمراً. (5)

بما أن $g_3 : (x, y^{-1}) \to xy$ مستمر فإنه من أجل أي مجاورة W للعنصر xy توجد مجاورة U للعنصر x و مجاورة V للعنصر y^{-1} بحيث يكون: $g_3(U \times V) \subseteq W$ ⟸ $UV^{-1} \subseteq W$ ولكن V^{-1} مجاورة لـ y أي أنه من أجل أي مجاورة W للعنصر xy أوجدنا المجاورة U للعنصر x والمجاورة V^{-1} للعنصر y بحيث يكون $UV^{-1} \subseteq W$ وبالتالي g_1 مستمر ومنه G زمرة طبولوجية. (5)

السؤال السابع: [15]

) التطبيق g_1 غير مستمر في النقطة $(1, 2)$ لأن $g_1(1, 2) = 2$ ولتكن $\{1, 2\}$ مجاورة للعنصر 2 في R^* فإن أصغر مجاورة للعنصر 1 هي $\{1, 2\}$ وأصغر مجاورة للعنصر 2 هي $\{1, 2\}$ وإن:

$$g_1(\{1,2\} \times \{1,2\}) = \{1,2\} \cdot \{1,2\} = \{1,2,4\} \nsubseteq \{1,2\}$$

أي أن g_1 غير مستمر على G. (7)

g_2 غير مستمر في النقطة 3 لأن $g_2(3) = \frac{1}{3}$ ولتكن $\{1, 2, \frac{1}{2}\}$ مجاو...

٤٢

للعنصر $\frac{1}{3}$ ، وإن أصغر مجاورة للعنصر 3 هي $\{1,2,3\}$ وبالتالي:

$$g_2(\{1,2,3\}) = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}\} \not\subseteq \{1, 2, \tfrac{1}{3}\}$$ (7)

أي أن g_2 غير مستمر على G

3- بما أن كلاً من g_1 و g_2 غير مستمر إذاً G ليست زمرة طبولوجية (1)

د. عصام نسيم

٢٠١٣/٨/٢١

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (٤)

لطلاب السنة الرابعة رياضيات - جبر

الدورة الإضافية للعام الدراسي ٢٠١٤/٢٠١٥

السؤال الأول: **15**

$B = \{ b\in S \,;\, bS = Sb = S \}$

ال المجموعة

لزوم الشرط: $B \neq \phi$ فيوجد عنصر $b\in S$ ينتمي الى B وبالتالي

$\forall a\in S$ فإنه يوجد $x, y\in S$ بحيث يكون: $bx = a \,,\ yb = a$ (5)

لكن $b\in S$ وبالتالي يوجد $e, e'\in S$ بحيث يكون $be = b$ و $e'b = b$

ومنه نجد: (5)

$ae = ybe = yb = a \Rightarrow$ e حيادي يميني

$e'a = e'bx = bx = a \Rightarrow$ e' حيادي يساري

$\Rightarrow e = e'$ حيادي في S

وبالتالي S مونوئيد

كفاية الشرط: إذا كانت S مونوئيد فحياديها e ينتمي الى B لأن:

$eS = Se = S$ ، وبالتالي $B \neq \phi$ (5)

السؤال الثاني: **25**

أ- أي لنبرهن أن $\lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$

ليكن λ_a , λ_b عنصرين من مجموعة الانسحابات اليسارية للمجموعة S وذلك

$\forall x\in S$ فإن:

$$\lambda_a \lambda_b (x) = \lambda_a(\lambda_b(x)) = \lambda_a(bx) = a(bx) = (ab)x = \lambda_{ab}(x)$$ (15)

$$\Rightarrow \lambda_a \lambda_b = \lambda_{ab}$$

$$\left.\begin{array}{l} x\cdot\lambda_a(y) = xay \\ \rho_a(x)\cdot y = xay \end{array}\right\} \Rightarrow x\,\lambda_a(y) = \rho_a(x)\,y \Rightarrow$$ λ_a و ρ_a مترابطان (10)

السؤال الثالث: [20]

- لنفرض ان B هي تقاطع كل أصناف الزمر الجزئية من S الحاوية على A.

ان $A\subseteq B$ و B هي نصف زمرة ⟸ B تحوي كل الجداءات الممكنة لعناصر من A أي أن $\langle A\rangle\subseteq B$

من ناحية أخرى $A\subseteq\langle A\rangle$ وبالتالي حسب تعريف B فإن $B\subseteq\langle A\rangle$

ومنه نستنتج أن $B=\langle A\rangle$ (15) ~~أن كل نصف زمرة جزئية من S~~

- نلاحظ أن $B=\langle A\rangle$، أن كل نصف زمرة جزئية من S تحوي A وتكون حاوية لـ $\langle A\rangle$، وبالتالي فهي تحوي B، ومنه ينتج أن B هي أصغر نصف زمرة جزئية من S تحوي A، أي أن B هي تقاطع كل أصناف الزمر الجزئية من S الحاوية لـ A. (10)

السؤال الرابع: [15]

لتكن $a\in G$، ولتكن W مجاورة مفتوحة لـ a بما أن $\lambda_{a^{-1}}: x\to a^{-1}x$ أو $\lambda_a^{-1}: x\to a^{-1}x$ هو هوميومورفيزم حسب مبرهنة فإن $\lambda_a^{-1}(W)=a^{-1}W$ تكون مجموعة مفتوحة حاوية للعنصر e، أي أنها مجاورة لـ e (8)

ومنه يوجد عنصر $U\in\{U\}$ بحيث يكون $U\subseteq a^{-1}W$ ⟸ $aU\subseteq W$

⟸ $\{aU\}$ جملة أساسية لمجاورات a ومنه نتج أن $\{xU\}$ هي قاعدة للتبولوجيا على G (7)

السؤال الخامس: [15]

- اذا كانت G زمرة تبولوجية فإن كل من التطبيقين

$g_1: G\times G\to G$, $g_1(x,y)\to xy$ و $g_2: G\to G$; $g_2(x)\mapsto x^{-1}$

مستمر؟

لتكن W مجاورة ما لـ xy^{-1} ⟸ توجد مجاورة U لـ x و V لـ y^{-1} بحيث يكون $UV\subseteq W$ (8)

V مجاورة لـ y^{-1} و $g_2: y \to y^{-1}$ مستمر ⇐ توجد مجاورة V_1 لـ y

بحيث يكون $V_1^{-1} \subseteq V$ وبالتالي فإن: $UV_1^{-1} \subseteq UV \subseteq W$ أي أن g_1

مستمر. (7)

السؤال السادس: [١٥]

١- إن $g_1(1,2) = 1+2 = 3$ وإن $\{1,3\}$ مجاورة للعنصر 3 كما أن

أصغر مجاورة للعنصر 1 هي $\{1\}$ وأصغر مجاورة للعنصر 2 هي $\{1,2\}$

وإن $g_1(\{1\} \times \{1,2\}) = \{2,3\} \nsubseteq \{1,3\}$

أي أن g_1 غير مستمر في النقطة $(1,2)$ (5)

٢- إن $g_2(2) = -2$ وإن $\{1,-2\}$ مجاورة للعنصر -2 و

$\{1,2\}$ أصغر مجاورة للعنصر 2 وإن $g_2(\{1,2\}) = \{-1,-2\} \nsubseteq \{1,-2\}$

أي أن g_2 غير مستمر في النقطة 2 . (5)

د. عصام نيسم

جامعة البعث
كلية العلوم
قسم الرياضيات

امتحان مقرر بنى جبرية (4)
لطلاب السنة الرابعة رياضيات – شعبة الجبر
الفصل الثاني للعام الدراسي 2012 /2013

اسم الطالب:
المدة: ساعتان
العلامة: 100

<u>السؤال الأول:</u> (15 علامة) لتكن S نصف زمرة و B مجموعة القواسم اليمينية واليسارية لكل عنصر من S ، فأثبت أن B تكون غير خالية إذا وفقط إذا كانت S مونوئيد (نصف زمرة واحدية) .

<u>السؤال الثاني:</u> (15 علامة) لتكن S نصف زمرة و A مجموعة جزئية غير خالية من S ، اثبت أن $B = (A)$ إذا وفقط إذا كانت B هي تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A .

<u>السؤال الثالث:</u> (10 علامات) لتكن S نصف زمرة و $a \in S$ وإذا كان ρ_a هو التحويل اليميني الداخلي ، فأثبت أن المجموعة $\{\rho_a ; a \in S\}$ هي نصف زمرة جزئية من نصف زمرة التحويلات التامة $\mathcal{F}(S)$ لنصف الزمرة S .

<u>السؤال الرابع:</u> (20 علامة) ليكن e عنصرا جامدا من نُصف زمرة S ولتكن H_e مجموعة جزئية من eSe تحوي كل عنصر من eSe يملك نظيرا من eSe بالنسبة إلى e ، فأثبت أن:

1) H_e زمرة جزئية من S تحوي e .

2) H_e تحوي أي زمرة جزئية G من S تتقاطع مع H_e أي أن $G \cap H_e \neq \emptyset \Rightarrow G \subseteq H_e$.

<u>السؤال الخامس:</u> (15 علامة) بفرض أن $\{u\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر الحيادي e في الزمرة النصف طبولوجية G ، أثبت أن $\{xu\}$ تشكل قاعدة للطبولوجيا على G .

<u>السؤال السادس:</u> (15 علامة) اثبت أن كل زمرة طبولوجية تملك جملة أساسية تناظرية $\{u\}$ لمجاورات العنصر الحيادي e

<u>السؤال السابع:</u> (10 علامات) لتكن $\mathbb{R}^*$ مجموعة الأعداد الحقيقية عدا الصفر ولنزودها بعملية الضرب العادية فتصبح $(\mathbb{R}^*, .)$ زمرة، ولنعرف طبولوجيا τ على $\mathbb{R}^*$ بالشكل التالي: $U \in \tau \Rightarrow A \subseteq U$ حيث $A = \{2\}$ (أي أن المجموعات المفتوحة هي المجموعات الحاوية على العدد 2) والمطلوب:

1) هل g_1 مستمر ؟ ولماذا ؟

2) هل g_2 مستمر ؟ ولماذا ؟

3) إستنتج فيما إذا كان $\mathbb{R}^*$ زمرة طبولوجية أم لا ؟

حمص في 27 /6 /2013

د .عصام نسيم

سلم تصحيح مقرر بنى جبرية (4)

لطلاب السنة الرابعة رياضيات (جبر)

الفصل الثاني للعام الدراسي ٢٠١٢/٢٠١٣

السؤال الأول: 15

ان المجموعة $B = \{ b \in S \; ; \; bS = Sb = S \}$

لزوم الشرط: $B \neq \phi$ فيوجد عنصر $b \in S$ ينتمي الى B وبالتالي

$\forall a \in S$ فإنه يوجد $x, y \in S$ بحيث $bx = a \; , \; yb = a$ (5)

لكن $b \in S$ وبالتالي يوجد $e \in S$ و $e' \in S$ بحيث يكون $be = b \; , \; e'b = b$

ومنه نجد:

$ae = ybe = yb = a \Rightarrow$ e حيادي يميني

$e'a = e'bx = bx = a \Rightarrow$ e' حيادي يساري

$\Rightarrow e = e'$ حيادي في S (5)

وبالتالي S مونوئيد:

كفاية الشرط: إذا كانت S مونوئيد فحيادها e ينتمي الى B لأن $eS = Se = S$ وبالتالي $B \neq \phi$ (5)

السؤال الثاني: 15

١ - لنفرض أن B هي تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A.

أن $A \subseteq B$ و B هي نصف زمرة $\Leftarrow$ B تحوي كل الجداءات الممكنة لعناصر A أي أن $\langle A \rangle \subseteq B$ (8)

من ناحية أخرى $A \subseteq \langle A \rangle$ (نصف زمرة تحوي A) وبالتالي حسب تعريف B

فإن $B \subseteq \langle A \rangle$ ومنه نستنتج $B = \langle A \rangle$. (7)

- لتكن $B = \langle A \rangle$ بما أن كل نصف زمرة جزئية من S تحوي A فهي تحوي $\langle A \rangle$

أي أنها تحوي B وبالتالي B هي أصغر نصف زمرة جزئية

وبالتالي فهي عبارة عن تقاطع كل أنصاف الزمر الجزئية من S الحاوية على A.

الفصل الثاني (٢٠١٢ - ٢٠١٣)

الصفحة (٢)

السؤال الثالث: 10

ليكن ρ_a و ρ_b عنصرين من مجموعة الانسحابات اليمينية للمجموعة S فمهما يكن $x \in S$ فإن:

$$\rho_a \rho_b(x) = \rho_a(\rho_b(x)) = \rho_a(xb) = (xb)a = x(ba) = \rho_{ba}(x)$$ (5)

أي أن $\{\rho_a ; a \in S\}$ نصف زمرة جزئية من $\mathcal{T}(S)$ (5)

السؤال الرابع: 20

1) ان eSe نصف زمرة جزئية من S لها العنصر الحيادي e وذلك لأن:

$$\forall a,b \in eSe \Rightarrow \begin{cases} ae = ea = a \\ be = eb = b \end{cases} \Rightarrow abe = ab = eab \Rightarrow ab \in eSe$$

(5) e حيادي في eSe $\Leftarrow$ $\forall a \in eSe \Rightarrow ae = ea = a$

اذا كان $x, y \in eSe$ بحيث أن $xy = yx = e$ فإن $x, y \in H_e$ حسب تعريف H_e

كذلك فإن $e \in H_e$، إضافة الى ذلك إذا كان $u, v \in H_e \Leftarrow$ يوجد $u', v' \in H_e$

بحيث يكون $uu' = u'u = e$ و $vv' = v'v = e$ وبالتالي فإن (5)

$(uv)(v'u') = (v'u')(uv) = e$

ومنه نستنتج انه $\forall u, v \in H_e$ فإن $uv \in H_e$ وبالتالي فإن H_e زمرة جزئية من S.

2) بفرض ان G زمرة جزئية من S بحيث أن $G \cap H_e \neq \phi$ وبفرض ان f

(5) حيادي في G وليكن $a \in G \cap H_e$ و g نظير a في G و h نظير a في H_e

فإن:

$e = ha = haf = ef = eag = ag = f$

اذن e هو حيادي في G وبالتالي $G \subseteq eSe$ وحسب تعريف H_e فإن

(5) $G \subseteq H_e$

فصل ثاني (٢٠١٢ - ٢٠١٣)

الصفحة (٣)

السؤال الخامس: 15

لتكن a عنصر اختياري من G ولتكن W مجاورة مفتوحة ما لـ a

$\lambda_a^{-1} : x \to a^{-1}x$ هوميومورفيزم (حسب مبرهنة سابقة) فإن: (5)

$\lambda_a^{-1}(W) = a^{-1}W$ تكون مجموعة مفتوحة حاوية للعنصر e، أي أنها مجاورة لـ e (5)

ومنه يوجد $u \in \{u\}$ بحيث يكون $u \subseteq a^{-1}W$ (لأن $\{u\}$ جملة أساسية لمجاورات e) ومنه ينتج أن $au \subseteq W$ أي أن $\{xu\}$ قاعدة للطبولوجيا على G. (5)

السؤال السادس: 15

لتكن $\{V\}$ جملة أساسية من المجاورات المفتوحة للعنصر e، وبما أن $e^{-1} = e$ وأن g_2 هوميومورفيزم يكون من أجل أي V من $\{V\}$ فإن V^{-1} مجاورة مفتوحة لـ e، فإذا أخذنا $u = V \cap V^{-1}$ فإن u تكون مجاورة متناظرة لـ e وذلك لأن $u^{-1} = V \cap V^{-1} = u$، وبما أن كل V تحوي u ينتج أن كل مجاورة لـ e تحوي مجاورة V و V تحوي u ينتج أن $\{u\}$ جملة أساسية لمجاورات e وهي متناظرة (7) (8)

السؤال السابع: ١٠

١) التطبيق g_1 غير مستمر في النقطة $(1,2)$ وذلك لأن:

$g_1(1,2) = 2$، أن $\{2\}$ مجاورة للنقطة (2) وأن أصغر مجاورة للنقطة (1) هي $\{1,2\}$ وأصغر مجاورة للنقطة (2) هي $\{2\}$ كما أن

$\{1,2\}\{2\} = \{2,4\} \not\subseteq \{2\}$ (5)

وبالتالي فإن g_1 غير مستمر في R^*

٢) التطبيق g_2 غير مستمر في النقطة (3) لأن $g_2(3) = \frac{1}{3}$

أن $\{\frac{1}{3}, 2\}$ هي مجاورة للنقطة $\frac{1}{3}$ وأن أصغر مجاورة للنقطة (3) هي $\{2,3\}$ كما أن $\{2,3\}^{-1} = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\} \not\subseteq \{\frac{1}{3}, 2\}$ أي أن g_2 غير مستمر في R^* (4)

٣) نستنتج أن R^* ليست زمرة طبولوجية. (1)